THE ACCURACY OF CHOOSHING THE OPTIMAL THRESHOLD BY USING THE TWOFOLD CROSS-VALIDATION METHOD IN WAVELET SHRINKAGE DOMAIN

By N. Setyaningsih

Departement of Mathematic Education
Muhammadiyah University of Surakarta

IICMA

ABSTRACT

Suppose that given an unknown function f on [0,1] from data :
$y_i = f(t_i) + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ with $t_i = i/n$ dan ε_i iid $N(0, \sigma^2)$. Donoho et. al. (1993) has introduced the method of wavelet shrinkage for estimation problems , which refers to removing noise (denoising) by shrinking wavelet coefficient towards zero.

The main aim of the paper are (1) how to formulate about the accuracy of the choosing threshold expressed in form the integrated squared error (ISE) and (2) how the effect of the use different basis wavelet and the use different shrinkage function in counting the ISE.

The result of this research are (1) the formulation of The ISE is

$$\hat{m}(\lambda) = \sum_{j,k} \{ \{\hat{\sigma}\,\xi s(\frac{w^{E}_{j,k}}{\hat{\sigma}}, \lambda) - \tilde{w}^{O}_{j,k}\}^2 + \{\hat{\sigma}\,\xi s(\frac{w^{O}_{j,k}}{\hat{\sigma}}, \lambda) - \tilde{w}^{E}_{j,k}\}^2 \}$$ **and** (2)

the result of comparison between the twofold cross-validation method with the vishushrink method is the accuracy level by using the twofold cross-validation method better than by using the vishushrink method for two different basis wavelets and two different shrinkage functions.

Key words : threshold , wavelet shrinkage ,twofold cross-validation, ISE
----

1. Introduction

The model function is writen in the form of $y_i = f(t_i) + \varepsilon_i$, for $i = 1, 2, 3, \ldots n$, with ε_i is distributed by $N(0, \sigma^2)$; is an known function and $t_i = \frac{i}{n} \in [0,1]$. The problem is how to estimate that model function which be a result of estimation of $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ with small risk value.

Recently, scientists discuss wavelet and its application either in the field of data compression or mathematics . Statisticians discuss wavelet addresing on basis ortonormal based on the multiresolution analysis. Wavelet has an ability to localize simultaneously in time and in frequency of the data being estimated. With wavelet, the amount of localization in time and frequency are automatically adapted. In statistical function estimation, standar method rely upon certain assumption about smoothness of the function being estimated. With wavelet, the assumption are relaxed considerably. Donoho and Johstone (1993) have developed the kind of wavelet to denoise the data. The prosedure is called a wavelet shrinkge. They have introduced the metdoh of wavelet shrinkage for estimation problems which refers to removing noise (denoising) of wavelet coefficient toward zero by using *soft shrinkage* function and *hard shrinkage* function.

The choosing of the optimal threshold influences to find the estimation function. Donoho(1995) uses the visu shrink method to look for a optimal threshold. His result shows that a result of estimation is a good visual with enough big risk value. For this, it needs the mothed to look for threshold with small risk value. Prakasa Rao (1983) uses the cross validation method to choose a bandwidth in estimasing. Based on this method, this paper will be improved in using the cross validation method in wavelet shrinkage domain, especially for using in the twofold cross validation method.

2. WAVELET SHRINKAGE

Wavelet didefinisikan sebagai gelombang sederhana yang dikonstruksikan dengan hati-hati sehingga memiliki sifat matematika yang dapat dipercaya. Di samping itu, wavlet juga menyediakan fungsi "building block" yang dapat digunakan untuk menggambarkan sebarang fungsi. Salah satu sifat yang paling penting adalah mempunyai kemampuan untuk menyesuaikan secara spasial dari ciri suatu fungsi dan dapat menyajikan fungsi secara parsemoni.

Wavelet dibangun dengan dilatasi dan translasi dari suatu fungsi ψ , yang disebut sebagai "mother wavelet" :

$$\boldsymbol{\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)} \quad , \text{ untuk } \quad j , k \in Z$$

dengan : j : indeks dilatasi dan k : indeks tranlasi

Definisi 2.1.

Pendekatan MRA didefinisikan sebagai barisan ruang bagian

$V_j = \{ f \in L_2(R) :$ f fungsi konstan sepotong-potong pada interval $[k\,2^{-j}, (k+1)\,2^{-j})$, $K \in Z \}$ sedemikian sehingga memenuhi syarat-syarat berikut :

1. $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in Z$.
2. $\bigcap_{j\in Z} V_j = \{0\}$ **dan** $\overline{\bigcup_{j\in Z} V_j} = L_2\ (R)$
3. $f \in V_j \iff f(2\ .) \in V_O$
4. $f \in V_O \Rightarrow f(. - k) \in V_O$ **, untuk** $\forall k \in Z$
5. Terdapat $\phi \in V_o$, sedemikian sehingga $\{ \phi(. - k) , k \in Z \}$ merupakan basis orthonormal untuk V_o .

Definisi 2.2.

Diambil sebarang $\phi \in Vj$, maka $\{ \phi(x - k) , k \in Z \}$ adalah keluarga orthonormal yang memenuhi kondisi :

$$< \phi(. - k) , \phi(. - m > \;=\; \delta_{k,m} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{, untuk } k \neq m \\ 1 & \text{, untuk } k = m \end{cases}$$

($\delta_{k,m}$ disebut “kroneker delta”)

Teorema 2.1.

$(V_j)_{j\in Z}$ ruang bagian di $L_2(R)$ dan $\phi(x) \in L_2(R)$ merupakan fungsi skala. Jika $\phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k)$, untuk $j, k \in Z$, maka $\phi_{j,k}$ merupakan basis orthonormal dari V_j .

Definisi 2.3.

Ruang bagian $(V_j)_{j \in Z}$ yang memenuhi sifat 1 s/d 5 dari MRA .

Jika ada fungsi ϕ yang dapat digunakan untuk membentuk ruang V_j = Span $\{ \phi_{j,k} : k \in Z \}$ sedemikian sehingga $(V_j)_{j \in Z}$ merupakan MRA , maka fungsi skala ϕ dikatakan membangun MRA.

Teorema 2.2.

Andaikan $(V_j)_{j \in Z}$ ruang bagian di $L_2(R)$ yang memenuhi sifat 1 s/d 5. dari MRA, maka $\{\psi_{j,k} : j,k \in Z\}$ merupakan basis orthonormal untuk $L_2(R)$ sedemikian sehingga : $p^j f = p^{j-1} f + \sum_k \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$.

Dari penjelasan di atas dapat dipahami bahwa aproksimasi f pada sebarang tingkat resolusi j merupakan aproksimasi fungsi pada level berikutnya yang lebih rendah ditambah detail signal. Sehingga aproksimasi f dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari fungsi $\{\phi_{j,k} : j,k \in Z\}$ dan detail signal yang merupakan kombinasi linear fungsi wavelet $\{\psi_{j,k} : j,k \in Z\}$.

Dengan demikian aproksimasi $f(x) \in L_2(R)$ dapat dinyatakan seperti berikut :

$$f(x) \approx \sum_k c_{J,k}\, \phi_{J,k}(x) + \sum_{j \geq J} \sum_k d_{j,k}\, \psi_{j,k}(x)$$

dengan :

$c_{j,k}$: koefisien penghalus . $w_{j,k}$: koefisien detail

$j = 1, 2, 3, \ldots, J$ dan $k = 1, 2, 3, \ldots . 2^j$.

Wavelet shrinkage merupakan salah satu bentuk wavelet yang didasarkan pada prinsip penyusutan koefisien-koefisien wavelet menuju nol. Dengan wavelet shrinkage diharapkan hasil fungsi yang diestimasi bebas dari noise. Dalm penelitian ini hanya digunakan fungsi soft shrinkage yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\xi_S(x,\lambda) = \mathrm{sgn}(x)\,(|x| - \lambda)\ I(|x| > \lambda)$$

di mana :

I merupakan fungsi indikator dan $\lambda \in [0, \infty)$ merupakan nilai threshold.

Algoritma Pengestimasian Dengan Wavelet Shrinkage

Diberikan data dengan $n = 2^J$ dan model regresi seperti dalam persamaan (1.1) dengan σ tidak diketahui.

Untuk mencari estimasi dari fungsi f dengan menggunakan wavelet shrinkage dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

(1) Menghitung koefisien wavelet empiris dengan Transformasi wavelet diskrit (TWD)

Diambil A yang merupakan matrik orthogonal yang dibangunmelalui keluarga wavelet orthonormal $\{\psi_{j,k}\}$.

Misal $w = (w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad \ldots \quad w_n)^T$ menyatakan koefisien wavelet empiris yang diperoleh dari :

$$w_h = \sum_{i=1}^{n} a_{hi}\, y_i \qquad \text{dengan } h = 1, 2, 3, \ldots, n$$

(2) Menghitung estimasi $\hat{\sigma}$

Untuk menghitung $\hat{\sigma}$ yang merupakan standar deviasi dari koefisien wavelet w_h dapat digunakan perhitungan versi Donoho dan Johnstone (1995) . $\hat{\sigma}$ merupakan fungsi MAD (Median of Absulute Deviation) yang diberikan dengan aturan

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{median}\,(\,|\,w_h - \text{median}(w_h)\,|\,)}{0,6745} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1)$$

(3) Menghitung estimator koefisien wavelet shrinkage

Untuk menghitung estimator koefisien wavelet digunakan aturan soft shrinkage . Sehingga diperoleh estimator koefisien wavelet shrinkage sebagai berikut :

$$\hat{w}_h = \xi s\,(w_h, \hat{\sigma}\,\lambda) = \hat{\sigma}\,\xi_S\left(\frac{w_h}{\hat{\sigma}}, \lambda\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2)$$

(4) Menghitung estimator wavelet shrinkage $\hat{f}$

Untuk mencari estimator wavelet shrinkage $\hat{f}$ dilakukan dengan menginversikan $\hat{w}_h$ dengan transformasi wavelet diskrit.

Sehingga diperoleh estimator wavelet shrinkage sebagai berikut :

$$\hat{f}_i = A^{-1}\,\hat{w}_h = \sum_{h=1}^{n} a_{hi}\,\hat{w}_h$$

3. INTEGRATED SUQUARED ERROR

Berdasarkan persamaan (1,1) , pokok permasalahan dalam regresi adalah meminimumkan MISE antara $\hat{f}$ dan f. Akan tetapi dalam praktek fungsi f tidak diketahui , sehingga estimasi M yang dapat meminimumkan MISE harus ditemukan.

Definisi 3.1.

Diberikan suatu data dengan model persamaan (1.1) , maka bentuk diskrit dari ISE adalah :

$$\mathbf{m(t)} = \sum_{i=1}^{M} (\hat{f}_i - f_i)^2$$, dengan $\hat{f}_i$ estimator wavelet shrinkage.

Dari definisi tersebut nampak bahwa ISE dari estimator wavelet shrinkage merupakan fungsi dari threshold. Sifat dari ISE adalah pada interval tertentu ISE-nya hampir selalu konveks dan jika diasumsikan bahwa transformasi wavelet dari fungsi sebenarnya kecil , maka gradien dari ISE di $\lambda = 0$ hampir selalu negatif (Nason, 1994).

Kedua sifat tersebut secara bersama-sama akan berimplikasi dapat ditemukannya nilai tunggal untuk meminimumkan ISE.

Derivatif Pertama dari ISE.

Dari model persamaan (1.1), jika diambil $w_{j,k}$, $u_{j,k}$ dan $z_{j,k}$ yang masing-masing merupakan hasil transformasi wavelet dari y_i , f_i dan ε_i , maka diperoleh :

$$w_{j,k} = u_{j,k} + z_{j,k} . \qquad \text{dengan } z_{j,k} \text{ iid } N(0, \sigma^2) \qquad \ldots\ldots. \quad (3.3)$$

Berarti diperoleh estimator koefisien wavelet shrinkage : $\hat{w}_{j.k} = \hat{\sigma}\, \xi s(\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}, \lambda)$.

Berdasarkan definisi (3.1) , maka m(λ) dapat dinyatakan dalam koefisien wavelet seperti berikut :

$$\mathbf{m(\lambda)} = \sum_{j,k} \{\hat{w}_{j,k} - u_{j,k}\}^2$$

$$\mathbf{m(\lambda)} = \sum_{j,k} \{\hat{\sigma}\xi_S(\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}, \lambda) - u_{j,k}\}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \quad (3.4)$$

Dari persamaan tersebut diperoleh turunan pertama terhadap threshold λ seperti berikut :

Untuk setiap $\lambda \varepsilon R$, berlaku

$$\mathbf{m'(\lambda)} = 2\hat{\sigma} \sum_{j,k} \{\hat{\sigma} \xi_S (\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}, \lambda) - u_{j,k}\} \frac{\partial \xi_S (\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}, \lambda)}{\partial \lambda} \quad \ldots\ldots\ldots. \ (3.5)$$

dengan :

$$\frac{\partial \xi s(\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}, \lambda)}{\partial \lambda} = -\operatorname{sgn}(\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}})\, I(|\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}| > 0)$$

Nampak bahwa derivatif pertama dari ξ_S diskontinu di $\lambda = w$, maka derivatif untuk $m(\lambda)$ dari persaman (3.15) menjadi :

$$\mathbf{m'(\lambda)} = -2\hat{\sigma} \sum_{j,k} \{\operatorname{sgn}(\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}})(|\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}| - \lambda)\, I\,(|\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}| > \lambda) - u_{j,k}\} \operatorname{sgn}(\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}})\, I(|\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}| > \lambda)$$

$$= 2\hat{\sigma} \sum_{j,k} I(|\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}| > \lambda)\ \{u_{j,k} \operatorname{sgn}(\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}) - (|\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}| - \lambda)\} \quad \ldots\ldots. \ (3.6)$$

Karena $|\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}| = \operatorname{sgn}(\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}) \frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}$, maka diperoleh :

$$m'(\lambda) = 2\hat{\sigma} \sum_{j,k} I(|\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}| > \lambda)\ \{\operatorname{sgn}(\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}})(u_{j,k} - \frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}) + \lambda)\} \quad \ldots\ldots\ldots. \ (3.7)$$

untuk setiap $\lambda \in R$

Derivatif pertama dari $m(\lambda)$ menunjukan bahwa $m'(\lambda)$ naik linear pada setiap interval yang didefinisikan oleh nilai $|\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}|$ dan mempunyai diskontinu di setiap

$|\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}|$. Pada saat λ naik setelah $|\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}|$, bentuk $\mathbf{sgn}(\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}})(\mathbf{u}_{j,k} - \frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}) + |\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}|$ dikeluarkan dari persamaan (3.7).

Sehingga :

$$\mathbf{m'(|\,w_{j,k}\,|^{+}) = m'(|\,w_{j,k}\,|^{-}) - 2\,sgn(w_{j,k})u_{j,k}}$$

di mana : m'(.$^{-}$) dan m'(.$^{+}$) adalah derivatif kanan dan kiri dari m pada saat λ .

Ini berarti setiap $|\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}|$ terdapat lompatan random yang berukuran $\mathbf{M_{jk} = -2\,sgn(u_{j,k} + z_{j,k})u_{j,k}}$.

Keadaan yang ideal akan terjadi ketika semua lompatan mempunyai nilai positif atau nol, sehingga m (λ) akan konveks. Untuk nilai M_{jk} negatif akan terjadi untuk nilai-nilai $|\frac{w_{j,k}}{\hat{\sigma}}|$ yang kecil , sehingga kuantitas hampir selalu mendekati nol. Dalam situasi parktis skor cross-validation diminimumkan pada interval $[0,\lambda_{uv}]$, dengan λ_{uv} merupakan universal thresholding (Nason , 1994).

4. CHHOSING THE OPTIMAL THRESHOLD BY USING THE TWO FOLT CROSS VALIDATION METHOD

Diberikan data y_1 , y_2 , y_3 , …. y_n dengan persamaan regresi seperti dalam persamaan (1.1). Dengan transformasi wavelet diskrit yang dinyatakan dalam matrik orthogonal A, maka diperoleh bentuk koefisien wavelet : w = A y.
Sehingga dengan menggunakan aturan soft shrinkage diperoleh estimator koefisien wavelet shrinkage . Estimasi wavelet dengan nilai threshold yang paling baik akan mencapai resiko minimaks terhadap range yang lebar dari suatu ruang. Twofold

Cross-Validation merupakan salah satu metode pemilihan threshold yang mengacu pada peminimuman MSE.

Ide dasar dari Cross-Validation adalah untuk menemukan parameter penghalus yang merupakan estimator paling baik untuk mengestimasi data yang didasarkan pada observasi baru.

Metode Twofold Cross-Validation tidak dapat digunakan secara langsung dalam wavelet, karena tidak ada algoritma untuk menghitung transformasi wavelet diskrit dengan menggunakan wavelet orthogonal dengan design nonuniform (Nason, 1996).

Ambil data y_1 , y_2 , y_3 , …. y_n dengan $n = 2^J$ yang dibagi dalam dua bagian yang mempunyai ukuran sama; yaitu satu bagian untuk kelompok data berindeks genap dan sisanya 2^{J-1} merupakan kelompok data berindeks ganjil. Data berindeks ganjil akan digunakan untuk mengestimasi data berindeks genap dan berlaku sebaliknya.

Misalkan $\mathbf{y_1^O}, \mathbf{y_2^O}, \cdots, \mathbf{y_{n/2}^O}$ merupakan data berindeks ganjil dan $\mathbf{y_1^E}, \mathbf{y_2^E}, \cdots, \mathbf{y_{n/2}^E}$ merupakan data berindeks genap.

Jika $\hat{\mathbf{f}}^{\mathbf{o}}$ merupakan estimator wavelet dari data berindeks ganjil yang merupaka hasil estimasi dari fungsi g pada titik-titik $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{n}}, \ \mathbf{...}\ , \frac{\mathbf{(n-1)}}{\mathbf{n}}$ dan $\hat{\mathbf{f}}^{\mathbf{E}}$ merupakan estimator wavelet dari data berindeks genap yang merupakan estimasi dari fungsi f pada titik $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{n}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{n}}, \ \mathbf{...}\ , \frac{\mathbf{(n-2)}}{\mathbf{n}}, 1$, maka untuk membandingkan secara langsung titik yang diestimasi dengan data asal, digunakan aturan interpolasi . Perlu diperhatikan bahwa penggunaan aturan interpolasi data bersesuaian dengan pengindeksan dengan subset dari data; sehingga estimator yang dihasilkan berasal dari subset data tersebut.

Berdasarkan uraian di atas diperoleh estimasi $\hat{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\lambda})$ untuk (n/2) data seperti berikut :

$$\hat{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n/2}} \{ \{ \hat{\mathbf{f}}^{\mathbf{E}} (\frac{\mathbf{2i}}{\mathbf{n}}) - \tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{O}} \}^2 + \{ \hat{\mathbf{f}}^{\mathbf{O}} (\frac{\mathbf{2i-1}}{\mathbf{n}}) - \tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{E}} \}^2 \} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.1)$$

Jika $\mathbf{w}^{E}_{j,k}$ dan $\mathbf{w}^{O}_{j,k}$ yang masing-masing merupakan koefisien wavelet dari hasil transformasi dari data yang berindeks genap dan berindeks ganjil dengan $\tilde{\mathbf{w}}^{E}_{j,k}$ dan $\tilde{\mathbf{w}}^{O}_{j,k}$ merupakan koefisien wavelet yang dihasilkan dari interpolasi data dari $\tilde{\mathbf{y}}^{E}_{i}$ dan $\tilde{\mathbf{y}}^{0}_{i}$, maka persamaan (4.1) menjadi :

$$\hat{\mathbf{m}}(\lambda) = \sum_{j,k} \{ \{ \xi s\,(\mathbf{w}^{E}_{j,k}, \hat{\sigma}\lambda) - \tilde{\mathbf{w}}^{O}_{j,k} \}^2 + \{ \xi s\,(\mathbf{w}^{O}_{j,k}, \hat{\sigma}\lambda) - \tilde{\mathbf{w}}^{E}_{j,k} \}^2 \}$$

Dengan pendekatan Cross-Validation akan diperoleh threshold optimal yang dapat meminimukan $\hat{\mathbf{m}}(\lambda)$, dengan aturan : $\lambda^{n/2}_{CV} = \arg \min_{\lambda \geq 0} \hat{\mathbf{m}}(\lambda)$

Dari universal thresholding (Donoho,1995) memberikan nilai $\lambda_n = \sqrt{2 \log n}\,.\hat{\sigma}_n$ untuk n data ; sehingga nilai threshold untuk $\frac{n}{2}$ data adalah $\lambda_{n/2} = \sqrt{2 \log(\frac{n}{2})}\,.\hat{\sigma}_{n/2}$.

Berarti ada hubungan antara dua nilai threshold seperti berikut :

$$\lambda_n \approx (1 - \frac{\log 2}{\log n})^{-1/2} \lambda_{n/2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.2)$$

Dengan demikian estimasi $\hat{\mathbf{m}}(\lambda)$ dapat diminimumkan dengan menggunakan koreksi dalam persamaan (4.2) , yang kemudian digunakan untuk memperoleh skor Cross-Validation – nya.

Adapun sifat integrated square error dari $\hat{\mathbf{m}}(\lambda)$ seperti berikut .

Berdasarkan persamaan :

$$\hat{\mathbf{m}}(\lambda) = \sum_{j,k} \{ \{ \hat{\sigma}\, \xi s\,(\frac{\mathbf{w}^{E}_{j,k}}{\hat{\sigma}}, \lambda) - \tilde{\mathbf{w}}^{O}_{j,k} \}^2 + \{ \hat{\sigma}\, \xi s\,(\frac{\mathbf{w}^{O}_{j,k}}{\hat{\sigma}}, \lambda) - \tilde{\mathbf{w}}^{E}_{j,k} \}^2 \}$$

maka dengan menggunakan persamaan (3.7) akan diperoleh derivatif pertama dari $\hat{\mathbf{m}}(\lambda)$ seperti berikut :

$$\hat{m}'(\lambda) = 2\hat{\sigma}\sum_{j,k} I\left(\left|\frac{w_{j,k}^{E}}{\hat{\sigma}}\right| > \lambda\right)\left\{\mathrm{sgn}\left(\frac{w_{j,k}^{E}}{\hat{\sigma}}\right)\left(\tilde{w}_{j,k}^{O} - \frac{w_{j,k}^{E}}{\hat{\sigma}}\right) + \lambda\right\} +$$
$$2\hat{\sigma}\sum_{j,k} I\left(\left|\frac{w_{j,k}^{O}}{\hat{\sigma}}\right| > \lambda\right)\left\{\mathrm{sgn}\left(\frac{w_{j,k}^{O}}{\hat{\sigma}}\right)\left(\tilde{w}_{j,k}^{E} - \frac{w_{j,k}^{O}}{\hat{\sigma}}\right) + \lambda\right\}$$

untuk setiap $\lambda \in R$ dan $\hat{\sigma}$ merupakan fungsi dari MAD .
Derivatif akan kontinu dan naik linear pada interval yang didefinisikan oleh nilai-nilai mutlak dari $\{ w_{j,k}^{E} , w_{j,k}^{O} \}$ dan pada saat λ naik setelah $\left|\frac{w_{j,k}^{E}}{\hat{\sigma}}\right|$ bentuk :

$$\mathrm{sgn}\left(\frac{w_{j,k}^{E}}{\hat{\sigma}}\right)\left(\tilde{w}_{j,k}^{O} - \frac{w_{j,k}^{E}}{\hat{\sigma}}\right) + \left|\frac{w_{j,k}^{E}}{\hat{\sigma}}\right| = \mathrm{sgn}\left(\frac{w_{j,k}^{E}}{\hat{\sigma}}\right)\tilde{w}_{j,k}^{O}$$

dikeluarkan(didrop) dari persamaan derivatif tersebut.

Dengan cara yang sama untuk λ naik setelah $\left|\frac{w_{j,k}^{O}}{\hat{\sigma}}\right|$, maka bentuk $\mathrm{sgn}\left(\frac{w_{j,k}^{O}}{\hat{\sigma}}\right)\tilde{w}_{j,k}^{E}$ dikeluarkan dari persamaan derivatif. Berarti loncatan pada interval akan kecil dan secara heuristik Cross-Validation $\hat{m}(\lambda)$ akan konveks. Pada saat tersebut, jelas bahwa derivatif pertama dari $\hat{m}(\lambda)$ akan negatif pada saat $\lambda = 0$.

Jadi dengan probabilitas yang besar skor Cross-Validation $\hat{m}(\lambda)$ hampir konveks dan derivatif pertama di $\lambda = 0$ akan negatif. Ini berarti terdapat nilai threshold tunggal yang dapat meminimumkan $\hat{m}(\lambda)$.

Simulasi

Untuk lebih memperjelas permasalahan yang telah diuraikan di atas akan diberikan simulasi dengan membandingkan metode pemilihan batas ambang dengan metode twofold cross-validation dengan metode visushrink. Sesuai dengan bagan rancangan penelitian , maka model fungsi diambil dari data yang berasal dari fungsi diskontinu f(x) pada interval [0,1] dan ditambah suatu noise yang berdistribusi normal dengan standar deviasi 0,1 dengan banyak data 512. Fungsi diskontinu yang dimaksud sebagai berikut :

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{4x^2\,(3-4x)} & \mathbf{, untuk} \quad \mathbf{x \in [\,0\,,\frac{1}{2}\,]} \\ \mathbf{\frac{4}{3}x(4x^2-10x+7)-\frac{3}{4}} & \mathbf{, untuk} \quad \mathbf{x \in [\,\frac{1}{2}\,,\frac{3}{4}\,]} \\ \mathbf{\frac{16}{3}\,x\,(x-1)^2} & \mathbf{, untuk} \quad \mathbf{x \in [\,\frac{3}{4}\,,1\,]} \end{cases}$$

Adapun basis wavelet yang digunakan untuk mengestimasi adalah basis "haar" dan "S 8". Karena keterbatasan kemampuan komputer , maka sampel yang digunakan dalam simulasi ini adalah 128 , 256 dan 512. Sedangkan metode yang akan digunakan untuk pemilihan batas ambang batas ambang adalah *twofold cross-validation* dan metode visushrink yang digunakan oleh Donoho yang dikenal sebagai universal batas ambang dengan menggunakan aturan $\lambda = \sqrt{2\log n}\ \hat{\sigma}$.

Dari hasil estimasi tersebut, kemudian dicari tingkat keakurasiannya dengan menghitung nilai resiko tampak pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1. : Nilai ISE anara fungsi polinomial + nise iid N(0 , 0,1) dengan hasil konstruksi dengan metode twofold cross-validation dan metode visushrink

Ukuran Sampel	Basis Wavelet	VisuShrink		Twofold Cross-validation	
		Soft shrinkage	Hard shrinkage	Soft shrinkage	Hard shrinkage
N = 128	S 8	1,0587	0,9853	0,7829	0,8497
	Haar	1,1635	1,0125	0,9124	0,9012
N = 256	S 8	0,9926	0,8985	0,7523	0,8143
	Haar	1,015	0,9763	0,8943	0,8345
N = 512	S 8	0,9135	0,8732	0,7126	0,8015
	Haar	0,9632	0,9136	0,8542	0,8285

Dari table 4.1. menunjukan bahwa tingkat akurasi yang dinyatakan dalam ISE untuk pemilihan batas ambang dengan metode *twofold cross-validation* memberikan nilai ISE lebih kecil dari pada dengan metode *visushrink*. Ini menunjukan bahwa tingkat keakurasian dengan metode *twofold cross-validation* lebih baik daripada dengan metode *visushrink.* Di samping itu nilai ISE dengan menggunakan fungsi soft shrinkage lebih besar daripada dengan hard shrinkage. Berarti ditinjau dari tingkat akurasi , estimasi dengan hard shrinkage lebih akurat daripada dengan soft shrinkage.

Dari tabel 4.1 , juga menunjukan bahwa dengan menggunakan basis wavelet yang berbeda, akan memberikan nilai ISE yang berbeda pula. Nilai ISE dengan menggunakan basis wavelet "s 8" lebih kecil daripada dengan basis wavelet "haar" . Berati tingkat akurasi estimasi dengan basis wavelet " s 8" lebih baik daripada dengan basis "haar". . Hal itu juga berlaku untuk ukuran sampel yang berbeda. Dengan ukuran sampel besar akan memberikan nilai ISE yang kecil dan berlaku sebaliknya .

5. CONCLUSION

Dari uraian di atas , dapat disarikan bahwa untuk mengestimasi suatu fungsi f yang tidak diketahui dari persamaan (1,1) dapat digunakan analisis regresi dengan pendekatan nonparametrik. Ada beberapa metode yang sering digunakan untuk pengestimasian dengan pendekatan nonparametrik , antara lain deret orthogonal. Akan tetapi metode tersebut menuntut adanya asumsi smooth (kelicinan) dari fungsi yang akan diestimasikan.

Wavelet merupakan alternatif untuk mengestimasi. Dengan wavelet kelemahan-kelemahan dari estimator orthogonal dapat diatasi , misalnya sifat diskontinu dari fungsi. Wavelet shrinkage merupakan bentuk wavelet yang mengacu pada penghilangan noise (denoising) , dengan cara menyusutkan koefisien –koefisien wavelet menuju nol. Dari hasil estimasi dengan wavelet shrinkage akan merupakan suatu fungsi shrinkage dengan mengandung parameter batas ambang.

Twofold Cross-Validation merupakan salah satu metode pemilihan batas ambang. Dari hasil analisis menunjukan bahwa skor(nilai) yang diperoleh dengan metode *twofold cross-validation* dapat digunakan untuk meminimumkan ISE dari estimator wavelet shrinkage. Metode *twofold cross-validation* cara kerjanya didasarkan pada pembagian data menjadi dua bagian ; yaitu data genap dan data ganjil. Adapun rumus/teorema untuk ISE yang telah diperoleh :

$$\hat{\mathbf{m}}(\lambda) = \sum_{j,k}\{\{\hat{\sigma}\,\xi s\,(\frac{W^{E}_{j,k}}{\hat{\sigma}}, \lambda) - \tilde{w}^{O}_{j,k}\}^2 + \{\hat{\sigma}\,\xi s\,(\frac{W^{O}_{j,k}}{\hat{\sigma}}, \lambda) - \tilde{w}^{E}_{j,k}\}^2\}$$

Dengan membandingkan metode *twofold cross-validation* dan *visushrink* diperoleh hasil simulasi sebagai berikut :

(1) Skor ISE dengan metode *twofold cross-validation* lebih kecil jika dibandingkan dengan metode visushrink. Ini menujukan bahwa tingkat akurasi dengan metode *twofold cross-validation* lebih baik dari pada menggunakan metode visushrink.

(2) Skor ISE dengan menggunakan fungsi soft shrinkage lebih besar daripada dengan hard shrinkage. Berarti ditinjau dari tingkat akurasi , estimasi dengan hard shrinkage lebih akurat daripada dengan soft shrinkage

(3) Tingkat akurasi dengan menggunakan basis wavelet ” S 8” lebih baik daripada menggunakan basis wavelet ”Haar”.

Sebagai tindak lanjut dari hasil penelitian ini diberikan saran yang dapat digunakan sebagai bahan pertimbangan untuk mengadakan penelitian lebih lanjut , yaitu karena mengingat wavelet dibangun dari basis wavelet dan basis wavelet terdiri dari beberapa jenis , maka disarankan untuk mengembangkan dengan jenis basis yang berbeda. Disamping itu, perlu pengembangan wavelet shrinkage pada aplikasi lain, misal penerapan wavelet shrinkage untuk bidang biologi, geografi.

Dengan terlaksananya penelitian ini, tidak lupa peneliti mengucapkan terima kasih pada DIKTI yang telah mendanai penelitian ini dan juga rekan sejawat yang telah memberikan masukan dei sempurnanya penelitian ini.

PUSTAKA

Bruce, A.G. and Hong-Ye . 1996 . ***Applied Wavelet with S-Plus*** . New York : Springer – Verlag.

--------------- . 1996 . ***Understanding Waveshrink : Variance and Bias Estimation . Biometrika*** , Vol. 83, No. 4 , 727 – 742 .

Daubechies ,I . 1992 . ***Ten Lecture on Wavelets*** . Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).

Donoho, D.L. , Johnstone ,I.M., Kerkyacharian, G. and Picard . 1995 . ***Wavelet Shrinkage : Asymtopia ? .*** J. . Statist. RSoc. B, Vol. 57 , No. 2 ,301 –337.

Donoho , D. L. and Johnstone , I. M. 1993 . ***Adapting Unknown Smoothness Via Wavelet Shrinkage***. Technical Report No. 425 . Departement of Statistics , Stanford University , California.

Donoho, D. L. 1995 . ***De- Neoising by Soft Thresholding*** . IEEF Transaction on Information Theory , Vol. 41 , No. 3 , 613 – 627 .

Mallat, S.g. , 1989 , ***Multiresolution Approximation and Wavelet Orthonormal Bases L_2® .*** Transaction of The American Mathematical Society , Vol. 3 , 69-87.

Nason , G.P. 1994. ***Wavelet Regression by Cross Validation*** . Technical Report 447, Departement of Statistics, Stanford University, California.

Odgen , R.T. 1997 . ***Essential Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis*** . Boston : Birkhauser .

Yazhen Wang . 1996 . ***function Estimation Via Wavelet Shrinkage for Long Memory Data .*** The Annals of Statistics , Vol. 24 , No. 2 , 466-484